第 2 节 抛物线定义与几何性质综合问题（★★★）

强化训练

1．（2022·安徽合肥模拟·★★）已知抛物线$C: y^2 = 4\sqrt{3}x$的焦点为F，准线为l，过抛物线上一点P作准线的垂线，垂足为Q，若$\angle PFQ = 60^\circ$，则$|PF| =$（　）

（A）$4\sqrt{3}$　（B）$2\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）6

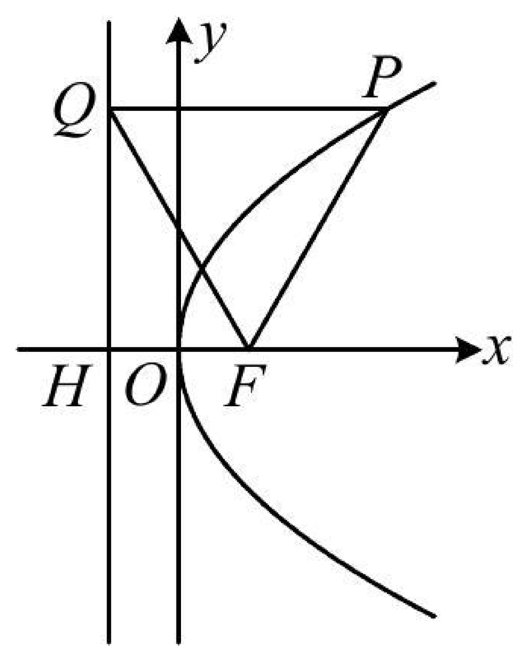
答案：A

解析：如图，抛物线C的焦点为$F(\sqrt{3},0)$，准线为$l: x = -\sqrt{3}$，记l与x轴交于点H，则$|FH| = 2\sqrt{3}$，

由抛物线定义，$|PQ| = |PF|$，又$\angle PFQ = 60^\circ$，所以ΔPFQ为正三角形，

于是只需到ΔHFQ中求出$|QF|$，即可得到$|PF|$，因为$\angle PQF = 60^\circ$，所以$\angle HQF = 30^\circ$，

故$|QF| = \dfrac{|FH|}{\sin\angle HQF} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3}$，结合$\Delta PFQ$为正三角形可得$|PF| = 4\sqrt{3}$.



2．（2022·湖南岳阳模拟·★★★）过抛物线$C: y^2 = 2px(p>0)$的焦点F且斜率$k>0$直线与C交于A，B两点，A在第一象限，过A作准线的垂线，垂足为H，若$\angle HFB$被x轴平分，则$k =$_____.

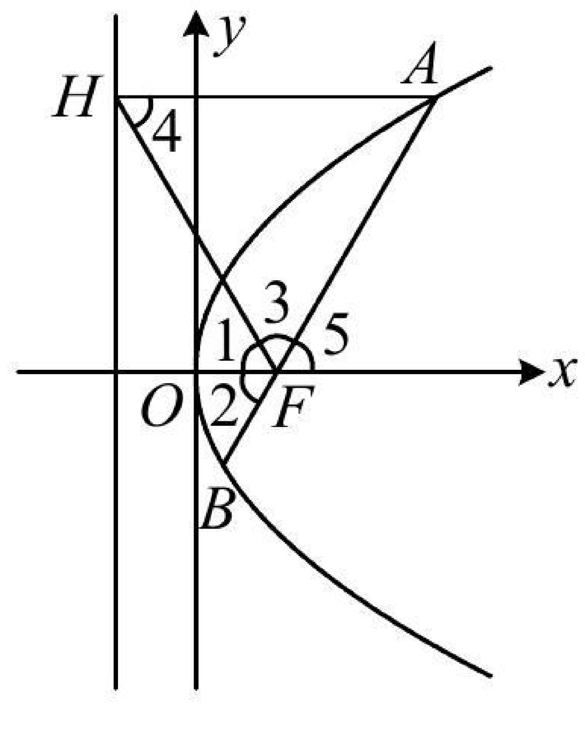
答案：$\sqrt{3}$

解析：要求直线AB的斜率，可尝试通过分析几何关系找倾斜角，

如图，因为$\angle HFB$被x轴平分，所以$\angle 1 = \angle 2$，又由抛物线定义，$|AH| = |AF|$，所以$\angle 3 = \angle 4$，

因为$AH // x$轴，所以$\angle 1 = \angle 4$，故$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$，又$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$，所以$\angle 2 = 60^\circ$，

由图可知$\angle 5 = \angle 2$，所以$\angle 5 = 60^\circ$，故直线AB的斜率$k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.



3．（2022·广东汕头模拟·★★★）已知抛物线$C: y^2 = 6x$的焦点为F，A为C上一点且在第一象限，以F为圆心，FA为半径的圆与抛物线C的准线交于M，N两点，且A，F，M三点共线，则$|AF| =$_____.

答案：6

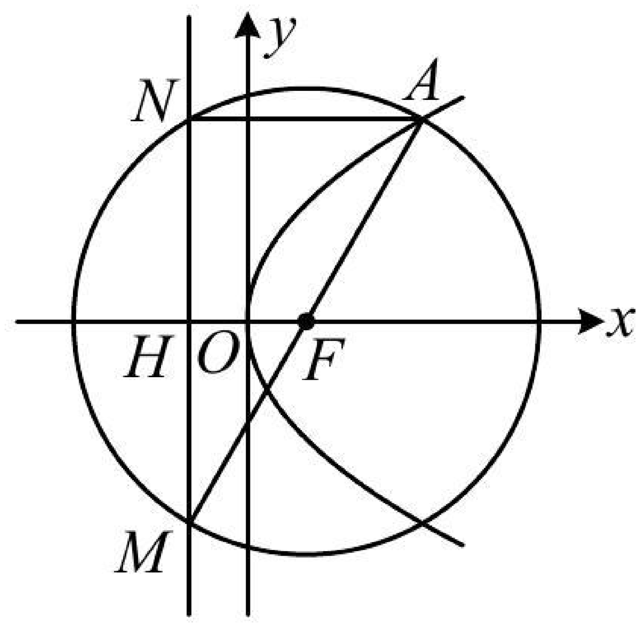
解析：如图，因为 A，F，M 三点共线，所以 AM 是圆的直径，

由直径可联想到圆心为中点、圆周角为直角，故 F 是 AM 中点，且 $AN \perp MN$ ①，

设准线与 x 轴交于点 H，则 $FH \perp MN$，结合①可得 $FH /\!/ AN$，故 $|AN| = 2|FH|$，

由题意，抛物线的焦点为 $F(\frac{3}{2},0)$，准线为 $x = -\frac{3}{2}$，所以 $|FH| = 3$，故 $|AN| = 6$，

结合抛物线定义可得 $|AF| = |AN| = 6$.



4．（2023·河南洛阳模拟·★★★）已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 P 作 l 的垂线，垂足为 A，若 $\overrightarrow{FA}$ 在 x 轴上的投影向量的长为 $2\sqrt{3}$，则 ΔPAF 的面积为（　　）

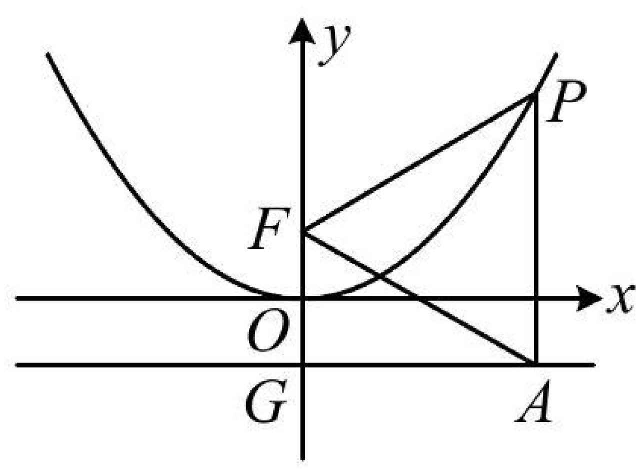
（A）$2\sqrt{3}$　（B）$4\sqrt{3}$　（C）$\sqrt{3}$　（D）6

答案：B

解析：如图，设准线 $y = -1$ 与 y 轴交于点 G，因为 $\overrightarrow{FA}$ 在 x 轴上的投影向量的长为 $2\sqrt{3}$，所以 $|GA| = 2\sqrt{3}$，

所以算 $S_{\Delta PAF}$ 以 $|GA|$ 为高，但还差底 $|PA|$，可由点 P 的纵坐标来算，x_P 等于 $|GA|$，代入抛物线即得 y_P，

$x_P = |GA| = 2\sqrt{3}$，代入 $x^2 = 4y$ 可求得点 P 的纵坐标为 $y_P = 3$，所以 $|PA| = 3 + 1 = 4$，故 $S_{\Delta PAF} = \frac{1}{2}|PA| \cdot |GA| = 4\sqrt{3}$.



5．（2013·江西卷·★★★）已知点 $A(2,0)$，抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F，射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M，与其准线相交于点 N，则 $|FM|:|MN| =$（　　）

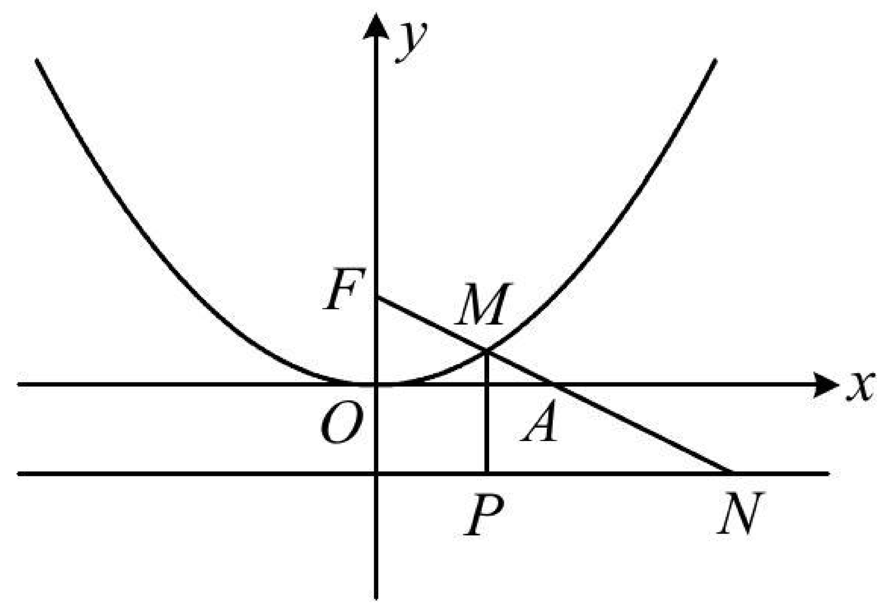
（A）$2:\sqrt{5}$　（B）$1:2$　（C）$1:\sqrt{5}$　（D）$1:3$

答案：C

解析：如图，直接分析 $|FM|:|MN|$ 不易，尝试将 $|FM|$ 用定义转化为到准线的距离来看，

作 $MP \perp$ 准线于 P，则 $|FM| = |MP|$，所以 $\frac{|FM|}{|MN|} = \frac{|MP|}{|MN|} = \sin\angle MNP = \sin\angle FAO = \frac{|OF|}{|FA|}$，

由题意，$F(0,1)$，所以 $|OF|=1$，$|AF|=\sqrt{5}$，故 $\dfrac{|FM|}{|MN|}=\dfrac{|OF|}{|AF|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.



6.（2014 • 新课标 I 卷 • ★★★）已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 是 l 上一点，Q 是直线 PF 与 C 的一个交点，若 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，则 $|QF|=$（　　）

（A）$\dfrac{7}{2}$　　（B）$\dfrac{5}{2}$　　（C）3　　（D）2

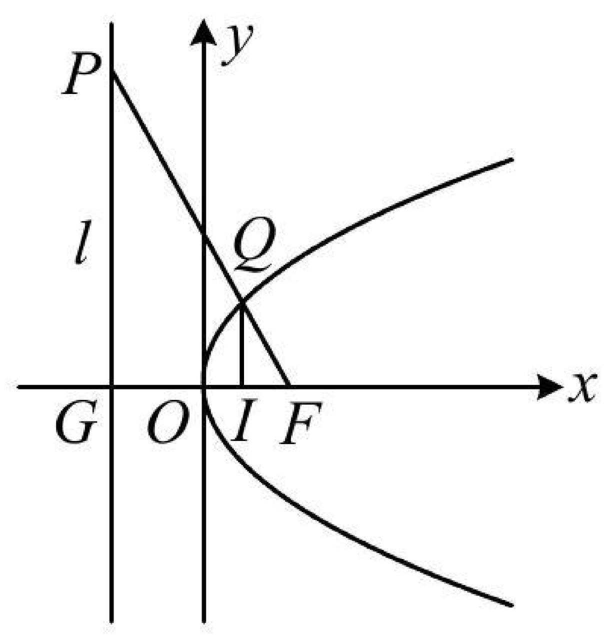
答案：C

解析：条件中有 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，可考虑向 x 轴作垂线，利用三角形相似将斜边之比转化为直角边之比，而直角边之比又可由 x_Q 表示，从而求出 x_Q，得到 $|QF|$，

如图，设准线 l 与 x 轴交于点 G，$QI\perp x$ 轴于点 I，

由题意，$F(2,0)$，由图可知，$\Delta FIQ\backsim\Delta FGP$，所以 $\dfrac{|FI|}{|FG|}=\dfrac{|FQ|}{|FP|}$，故 $\dfrac{2-x_Q}{4}=\dfrac{1}{4}$，

所以 $x_Q=1$，故 $|QF|=x_Q+2=3$.



7.（2022 • 广东开平模拟 • ★★★）已知抛物线 $C:y^2=16x$ 的焦点为 F，M 是 C 上一点，FM 的延长线交 y 轴于点 N，若 $3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，则 $|FN|=$_____.

答案：16

解析：给出 $3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，可设 FM 的长，并用它表示其它线段的长，

抛物线的准线为 $x=-4$，焦点为 $F(4,0)$，如图，作 $MM'\perp$ 准线于 M'，交 y 轴于点 G，

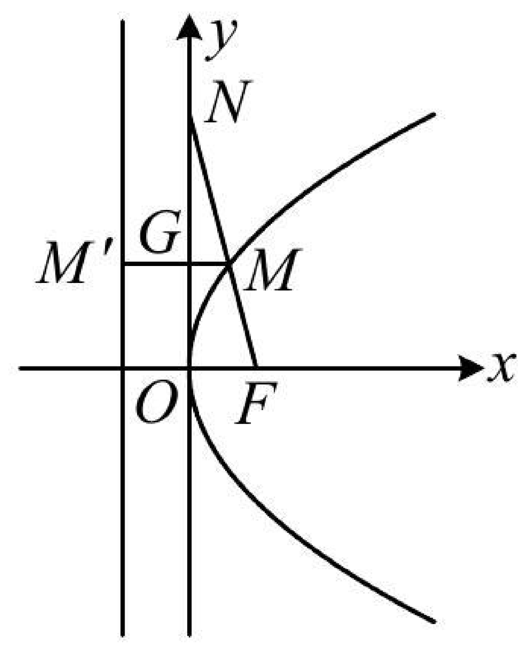
设 $|FM|=2m$，因为 $3\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{MN}$，所以 $\dfrac{|FM|}{|MN|}=\dfrac{2}{3}$，故 $|MN|=3m$，$|FN|=5m$ ①，

由抛物线定义，$|MM'|=|FM|=2m$，$|MG|=|MM'|-|M'G|=2m-4$，

从图形来看，可用相似比来建立关于 m 的方程，

因为 $GM /\!/ OF$，所以 $\dfrac{|GM|}{|OF|}=\dfrac{|MN|}{|FN|}$，

从而 $\dfrac{2m-4}{4}=\dfrac{3m}{5m}$，故 $m=\dfrac{16}{5}$，代入①得 $|FN|=16$.



8．（2022 • 北京模拟 • ★★★）已知抛物线 C 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线 m 与 C 交于点 A 和 B，点 A 在 l 上的投影为 D，若 $|AB|=|BD|$，则 $\dfrac{|AB|}{|AF|}=$（　　）

（A）$\dfrac{3}{2}$　　（B）2　　（C）$\dfrac{5}{2}$　　（D）3

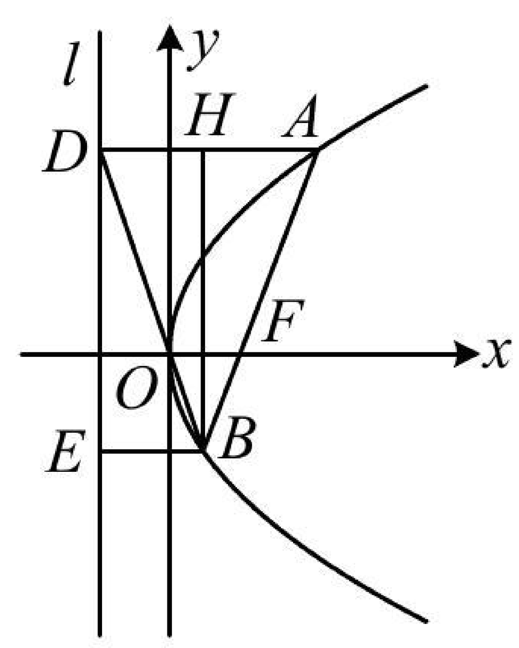
答案：A

解析：如图，作 $BE\perp$ 准线于 E，由抛物线定义，$\begin{cases}|BF|=|BE|\\|AF|=|AD|\end{cases}$，所以 $\dfrac{|AB|}{|AF|}=\dfrac{|AF|+|BF|}{|AF|}=\dfrac{|AD|+|BE|}{|AD|}$ ①，

故接下来应寻找 $|AD|$ 和 $|BE|$ 的关系，条件中有 $|AB|=|BD|$，想到取底边中点，

取 AD 中点 H，连接 BH，则 $BH\perp AD$，所以 $|BE|=|DH|=|AH|$，故 $|AD|=2|BE|$，

代入①可得 $\dfrac{|AB|}{|AF|}=\dfrac{2|BE|+|BE|}{2|BE|}=\dfrac{3}{2}$.



9．（2022 • 河南模拟 • ★★★）过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，交其准线于点 C，若点 F 是 AC 的中点，且 $|AF|=4$，则 $|AB|=$_____.

答案：$\dfrac{16}{3}$

解析：如图，已知 $|AF|$，只需求得 $|BF|$ 即可求出 $|AB|$，可先过 A，B 向准线作垂线，

作 $AA'\perp$ 准线于 A'，$BB'\perp$ 准线于 B'，则 $|AA'|=|AF|=4$，$|BB'|=|BF|$，

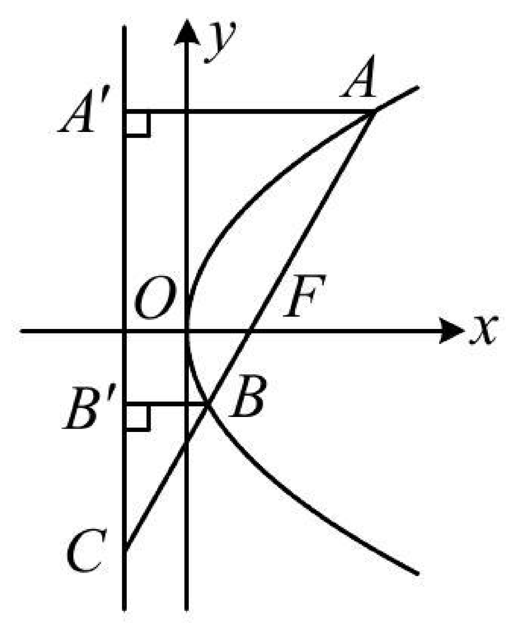
接下来我们可以设一段长，利用几何关系来分析其它有关线段的长，

设$|BB'|=|BF|=m$，因为F是AC中点，所以$|AC|=2|AF|=2|AA'|$，从而$\cos\angle CAA'=\dfrac{|AA'|}{|AC|}=\dfrac{1}{2}$，

故$\angle CAA'=60^{\circ}$，又$BB'\ /\!/\ AA'$，所以$\angle CBB'=60^{\circ}$，故$|BC|=\dfrac{|BB'|}{\cos\angle CBB'}=2m$，

所以$|CF|=3m$，$|AC|=2|CF|=6m$，又$|AC|=2|AF|=8$，所以$6m=8$，故$m=\dfrac{4}{3}$，即$|BF|=\dfrac{4}{3}$，

所以$|AB|=|AF|+|BF|=4+\dfrac{4}{3}=\dfrac{16}{3}$.



10.（2022·重庆巫山模拟·★★★）抛物线$E:y^2=4x$的焦点为F，过F的直线与E交于A，B两点，延长FB交E的准线l于点C，过A，B作l的垂线，垂足分别为M，N，若$|BC|=2|BN|$，则ΔAFM的面积为（　　）

（A）$4\sqrt{3}$　　（B）4　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）2

答案：A

解析：如图，我们可以设AF和BF的长，结合定义求其它线段的长，再分析几何关系建立方程，

设$|AF|=m$，$|BF|=n$，则$|AM|=m$，$|BN|=n$，

因为$|BC|=2|BN|$，所以$|BC|=2n$，$|FC|=3n$，且$\cos\angle NBC=\dfrac{|BN|}{|BC|}=\dfrac{1}{2}$，故$\angle NBC=\dfrac{\pi}{3}$，

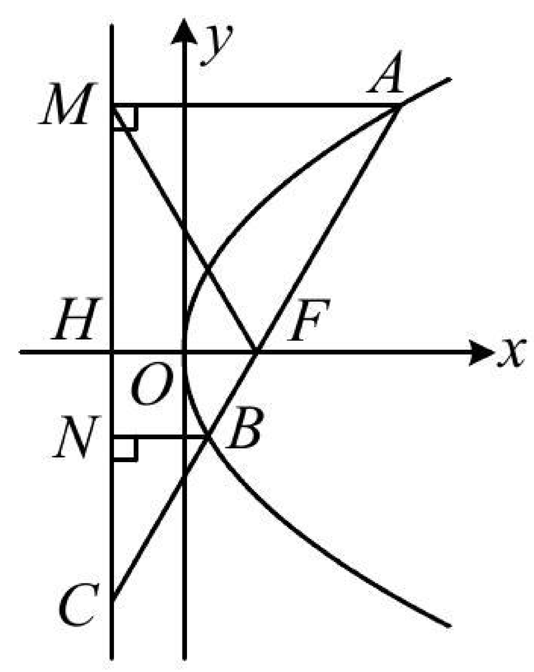
又$AM/\!/BN$，所以$\angle MAC=\dfrac{\pi}{3}$，从而$\cos\angle MAC=\dfrac{|AM|}{|AC|}=\dfrac{m}{m+3n}=\dfrac{1}{2}$，故$m=3n$，

找到m和n的关系，就能分析F在AC上的位置，结合$|FH|$是已知的，可由相似比求得$|AM|$，

由题意，抛物线的焦点为$F(1,0)$，准线为$l:x=-1$，所以$|FH|=2$，

由$m=3n$知$|AF|=|FC|$，所以F为AC中点，又$FH/\!/AM$，所以$|AM|=2|FH|=4$，

由$\angle MAC=\dfrac{\pi}{3}$和$|AM|=|AF|$知$\Delta AFM$是正三角形，所以$S_{\Delta AFM}=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin\dfrac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$.



11.（2022 •黑龙江齐齐哈尔模拟 •★★★★）已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的准线$x=-1$与x轴交于点A，F为C的焦点，B是C上第一象限内的一点，则当$\frac{|BF|}{|AB|}$取得最小值时，ΔABF的面积为（　　）

（A）2　（B）3　（C）4　（D）6

答案：A

解析：抛物线的准线为$x=-1\Rightarrow p=2\Rightarrow$抛物线的方程为$y^2=4x$，其焦点为$F(1,0)$，$A(-1,0)$，

如图 1，直接分析$\frac{|BF|}{|AB|}$的最小值不易，涉及$|BF|$，可用定义转化为P到准线的距离来看，

作$BD\perp$准线于D，则$|BF|=|BD|$，所以$\frac{|BF|}{|AB|}=\frac{|BD|}{|AB|}=\sin\angle BAD$，

要使$\sin\angle BAD$最小，只需$\angle BAD$最小，此时直线AB与抛物线相切，如图 2. 可联立直线和抛物线用$\Delta=0$求解，

设切线AB的方程为$x=my-1$，联立$\begin{cases}x=my-1\\y^2=4x\end{cases}$消去$x$整理得：$y^2-4my+4=0$ ①，

因为直线AB与抛物线相切，所以方程①的判别式$\Delta=(-4m)^2-4\times1\times4=0$，解得：$m=\pm1$，

代入①解得：$y=\pm2$，所以$y_B=\pm2$，故$S_{\Delta ABF}=\frac{1}{2}|AF|\cdot|y_B|=\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

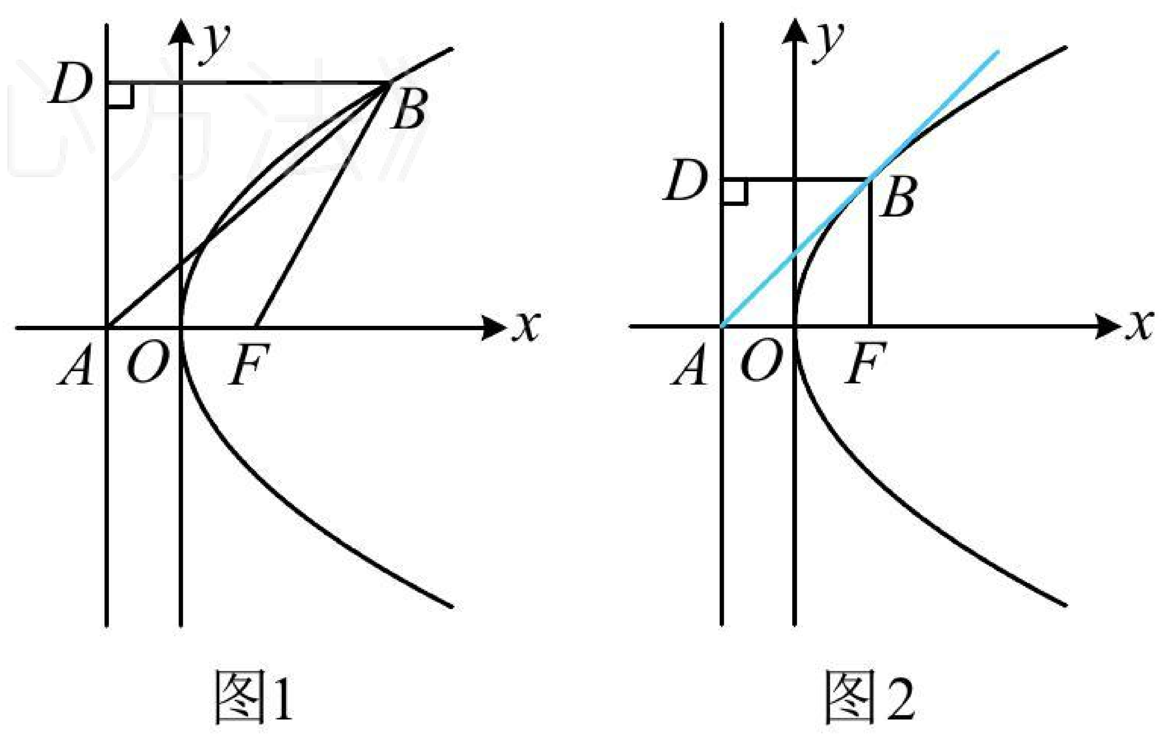


图1　　图2